Theorie Woche 7:

- **Begriffserklärung Isomorphismus/Automorphismus:**

Auch wenn es nicht so relevant ist, möchte ich hier etwas auf diese beiden Begriffe eingehen, da sie im Hintergrund der folgenden Theorie stehen.

- Isomorphismus: Bezeichnet eine bijektive Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen, bei uns sind es Vektorräume. (Bijektivität sollte aus der Analysis-Vorlesung bekannt sein, sonst fragt unbedingt.)
  Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei algebraischen Strukturen, dann heissen die beiden Strukturen zueinander isomorph.

- Automorphismus: Bezeichnet einen Isomorphismus von einer algebraischen Struktur (bei uns Vektorraum) auf sich selbst. Gibt es einen Automorphismus von einer algebraischen Struktur auf sich selbst, so nennt man sie automorph.

◦ Abbildungsmatrizen / Darstellungsmatrizen: Skript S. 77f.

Wie der Name bereits andeutet handelt es sich hierbei um die Matrizen, welche eine lin. Abb. darstellen. Die genaue Definition und grundlegende Eigenschaften, sowie anschauliche Beispiele finden sich im Skript.

◦ Kommutative Diagramme: –

Nachfolgend möchten wir verschiedene Arten von lin. Abb. und Abbildungsmatrizen betrachten. Aber um diese besser zu verstehen und auch grafisch betrachten zu können, benötigen wir sogenannte kommutative Diagramme:

Def: In de Mathematik stellt ein kommutatives Diagramm dar, dass verschiedene Verkettungen von Abbildungen das gleiche Ergebnis liefern.

⇝ eine Abb. f von A nach B kann durch einen Pfeil dargestellt werden

$$A \xrightarrow{f} B$$

⇝ eine Vekettung mit einer weiteren Abbildung g von B nach C kann durch das Aneinanderhängen der Pfeile ausgedrückt werden, so etwas nennt sich Diagramm:

$$A \xrightarrow[f]{} B \xrightarrow[g]{} C$$

$\rightsquigarrow$ Will man dieser Verkettung einen Namen geben, so kann man einen weiteren Pfeil h von A nach C einzeichnen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "h"] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Es wäre denkbar, dass h eine beliebige (bei uns immer lineare) Abbildung von A nach C ist. Wenn sie mit der Verkettung (am Ende dieser Theorie besprochen) $g \circ f$ übereinstimmt, sagt man, dass das Diagramm kommutiert.

$\rightsquigarrow$ Kurzgefasst: Ein Diagramm kommutiert, "wenn es egal ist, welchen Weg man wählt".

o Koordinatenabbildung: Skript S. 81 ff.

Wir spannen den Bogen zurück zum Thema der letzten Woche, und können nun abschliessend klären, was eine "Koordinatendarstellung" genau ist, und warum es sich um eine lineare Selbstabbildung handelt. Dafür betrachten wir erst folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\ V \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[r, bend left, "A"] & W \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

mit
- X, Y: Vektorräume beliebig
- V, W: korrespondierende Vektorräume im $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{R}^m$, Basen von X/Y
- f: lineare Abbildung von $X \to Y$
- A: Darstellungsmatrix von f

· k_x, k_y: Koordinatendarstellung von X/Y

⇝ Wir können nun klar erkennen, was eine Koordinatenwahl bewirkt. Wir wechseln von einem komplizierten Vektorraum (z.B. P_2), zu einem einfachen, bekannten Vektorraum aus Matrizen (z.B. $\mathbb{R}^3$). In diesem können wir dann eine "komplexe" lin. Abb. f (z.B. die Ableitung) als "einfache" Matrixmultiplikation mit der Darstellungsmatrix A von f abbilden. Somit ist die Koordinatenwahl selbst ein Basiswechsel! Und ein Basiswechsel entspricht einem Koordinatenwechsel!

Die Frage der linearen Selbstabbildung können wir folgendermassen klären: X und V, sowie Y und W, repräsentieren denselben Vektorraum, einfach mit einer anderen zugrundeliegenden Basis!

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V} \arrow[r, bend left, "\hat{A}"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{W} \arrow[l, bend left, "\hat{A}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "T'"'] \\
V \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[u, shift right, "S"'] & W \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "S'"']
\end{tikzcd}$$

mit $\tilde{V}, \tilde{W}$: alte Basen des V.R. X und Y

V, W: neue Basen in denselben V.R. "

T, S, T', S': Basiswechselmatrizen

$A, \hat{A}$: Abbildungsmatrix in jeweiliger Basis

Wir erkennen, dass der Basiswechsel (und somit auch Koordinatenwechsel!) T & S nur eine lin. Abb. von X nach X respektive Y nach Y sind ⇝ eine lineare Selbstabbildung.

∘ Abbildungsmatrix bei einer Koordinatentransformation:

Beispiele im Skript auf Seite 85 ff.

Nun kann man sich fragen, für was man die ganzen Basen- & Koordinatenwechsel macht. Die Antwort ist einfach, wir betrachten zwar nur einfache Probleme, welche man ohne Probleme in der jeweiligen Basis lösen kann, jedoch gibt es Probleme, die durch einen Basiswechsel <u>ungemein einfacher</u> werden. Dies ist eine Thematik, welche euch in eurem weiteren Studium häufig begleiten wird, ein Beispiel wäre die Fourier- und Laplacetransformation zur Analyse von Wechselstromnetzwerken.

Die komplette Problemlösung sieht in etwa so aus:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, shift right, "k_x"'] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_y"'] & \\
\tilde{V} \arrow[u, shift right, "k_x^{-1}"'] \arrow[r, bend left, "\tilde{A}"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{W} \arrow[u, shift right, "k_y^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "\tilde{A}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "T'"'] & \text{alte Basis} \\
V \arrow[u, shift right, "S"'] \arrow[r, bend left, "A"] & W \arrow[u, shift right, "S'"'] \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] & \text{neue Basis}
\end{tikzcd}$$

Wir treffen also eine Koordinatenwahl (k_x, k_y) und modellieren das Problem in $\tilde{V}/\tilde{W}$. Unter Umständen vereinfachen wir das Problem danach mithilfe eines Basis- & Koordinatenwechsels (T, T') um es zu lösen.

∘ Verkettung linearer Operationen:

Es gibt häufig Verwirrung beim lesen eines kommutativen Diagrammes, deshalb hier kurz eine Erklärung zu Verkettung lin. Abb.:

Wir betrachten

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ k_A \downarrow \uparrow k_A^{-1} & & k_B \downarrow \uparrow k_B^{-1} & & k_C \downarrow \uparrow k_C^{-1} \\ A & \xrightarrow{M_A^B} & B & \xrightarrow{M_B^C} & C \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{M_A^C} & & \end{array}$$

mit V, W, U: beliebige Vektorräume

A, B, C: jeweilige Basen

f, g: lin. Abbildungen

M_A^B, M_B^C: Darstellungsmatrizen

⟶ Wir verketten lineare Abbildungen in Matrixform analog zu den linearen Abbildungen:

Um von V nach U zu kommen, müssen wir erst f $(V \to W)$ und <u>dann</u> g $(W \to U)$ anwenden, wir schreiben $g \circ f$ $(V \to U)$. Wir lesen das Diagramm also eigentlich Rückwärts?, Genau gleich in den Basen: $\boxed{M_A^C = M_B^C \cdot M_A^B}$. Wir erkennen, die Verkettung entspricht der Matrixmultiplikation.

⟶ Was zuerst unintuitiv erscheint, lässt sich einfach durch die Rechtsassoziativität der Matrixmultiplikation erklären: Auf einen gegebenen Koordinatenvektor in A müssen wir <u>erst</u> M_A^B anwenden, und erst <u>dann</u> M_B^C, wir schreiben ja

$$[\underline{v}]_C = \underbrace{M_B^C \cdot \overbrace{M_A^B \cdot [\underline{v}]_A}^{[\underline{v}]_B}}_{[\underline{v}]_C}$$